Bemerkungen zu Cauchy's Theorie der Doppelbrechung.

Von **Viktor v. Lang,**

wirklichem Mitgliede der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

I.

Fresnel, dem wir die Gesetze der Lichtbewegung in doppelbrechenden Krystallen verdanken, konnte die hiebei auftretende Dispersion nicht erklären. Dies gelang erst Cauchy. So wichtig hiedurch die von Letzterem gegebene Theorie der Doppelbrechung geworden, so wenig befriedigend ist dessen Herleitung der Fresnel'schen Gesetze. Cauchy konnte dieselben nur näherungsweise ableiten, und dies nur durch ein ziemlich willkürliches Verfahren mit dem Coëfficienten der Bewegungsgleichungen. So bekommen Coëfficienten, welche ursprünglich gleich sind, zuletzt verschiedene Werthe.

Wollte man auch die Fresnel'schen Gesetze selbst nur als Näherungsformeln betrachten, so ist dies doch für die Hauptschnitte ganz unmöglich, wo sie durch hundertfältige Erfahrung richtig befunden sind. Die Cauchy'sche Theorie kann aber auch nicht einmal in den Hauptschnitten die Lichtbewegung wiedergeben. Dies lässt sich leicht zeigen.

Es seien u, v, w die Richtungscosinusse der Wellennormale, h, k, l die der Schwingungsrichtung und $\mathfrak{q}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, dann sind die Bewegungsgleichungen nach Cauchy, wenn wir die Beer'sche Bezeichnung [1] der Coëfficienten einführen.

---

[1] Beer, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig, 1855

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}^2 h &= [(\xi^2+p^2)u^2+(\eta^2+\pi^2)v^2+(\zeta^2+\nu^2)w^2]h+2\pi^2uvk+2\nu^2uwl\\ \mathfrak{q}^2 k &= 2\pi^2uvh+[(\xi^2+\pi^2)u^2+(\eta^2+q^2)v^2+(\zeta^2+\mu^2)w^2]h+2\mu^2vwl\\ \mathfrak{q}^2 l &= 2\nu^2uwh+2\mu^2vwk+[(\xi^2+\nu^2)u^2+(\eta^2+\mu^2)v^2+(\zeta^2+r^2)w^2]l\end{aligned}\right\} \quad 1)$$

Nehmen wir nun an, dass die Wellennormale im Hauptschnitt YZ liege, so ist $u = 0$ und die früheren Gleichungen werden

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}^2 h &= [(\eta^2+\pi^2)v^2+(\zeta^2+\nu^2)w^2]h\\ \mathfrak{q}^2 k &= [(\eta^2+q^2)v^2+(\zeta^2+\mu^2)w^2]k+2\mu^2vwl\\ \mathfrak{q}^2 l &= 2\mu^2vwk+[(\eta^2+\mu^2)v^2+(\zeta^2+r^2)w^2]l.\end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Wir zerlegen nun den Ausschlag in drei zu einander senkrechte Componenten. Die erste Componente falle in die Richtung der X-Axe, hat also die Richtungscosinusse

$$h_1 = 1, \quad k_1 = l_1 = 0; \qquad 3)$$

die zweite Componente falle in die YZ-Ebene und sei senkrecht zur Wellennormale, für ihre Richtungscosinusse ist daher

$$h_2 = 0, \; k_2 v + l_2 w = 0; \qquad 4)$$

die dritte endlich liege auch in der YZ-Ebene, sei aber parallel der Wellennormale, so dass

$$h_3 = 0, \; k_3 = 0, \; l_3 = w. \qquad 5)$$

Die Gleichungen 2) müssen natürlich auch für die einzelnen Componenten gelten: machen wir daher für h, k, l die angegebenen drei Substitutionen, so werden die Gleichungen 2)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{q}_1^2 &= (\eta^2+\pi^2)v^2+(\zeta^2+\nu^2)w^2\\ \mathfrak{q}^2 &= (\eta^2+q^2-2\mu^2)v^2+(\zeta^2+\mu^2)w^2\\ &\quad (\eta^2+\mu^2)v^2+(\zeta^2+r^2-3\mu^2)w^2\\ \mathfrak{q}_3^2 &= (\eta^2+q^2)v^2+(\zeta^2+3\mu^2)w^2\\ &\quad (\eta^2+3\mu^2)v^3+(\zeta^2+r^2)w^2\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

und nur wenn die Grössen $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ wirklich von einander verschieden sind, haben wir eine der Beobachtung entsprechende Doppelbrechung. Nun führt aber die zweite sowie die dritte Gleichung 6) auf die Bedingung

$$q^2 = r^2 = 3\mu^2,$$

aus welcher durch Betrachtung der anderen zwei Hauptschnitte

$$r^2 = p^2 = 3\nu^2$$
$$p^2 = q^2 = 3\pi^2$$

und somit auch

$$p^2 = q^2 = r^2 = 3\mu^2 = 3\nu^2 = 3\pi^2 \qquad 7)$$

folgt. Hiedurch werden die Gleichungen 6)

$$\mathfrak{q}_1^2 = \mathfrak{q}_2^2 = \mathfrak{q}_3^2 \qquad 8)$$

und geben keine Doppelbrechung.

II.

Sollen die Cauchy'schen Gleichungen die bekannten Gesetze der Doppelbrechung genau wiedergeben, so wäre vor Allem nothwendig, dass Coëfficienten, wie die von *uv* in der ersten und zweiten Gleichung 1) verschieden würden. Es frägt sich, wie lässt sich dies bewerkstelligen. Gehen wir auf die Bewegungsgleichungen zurück. Dieselben lauten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma f(\Delta r+\Delta\rho)\frac{\Delta x+\Delta\xi}{\Delta r+\Delta\rho}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma f(\Delta r+\Delta\rho)\frac{\Delta y+\Delta\eta}{\Delta r+\Delta\rho}\\
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma f(\Delta r+\Delta\rho)\frac{\Delta z+\Delta\zeta}{\Delta r+\Delta\rho}
\end{aligned}\right\} \qquad 9)$$

und sind abgeleitet unter der Voraussetzung, dass das Äthertheilchen, auf welches sie sich beziehen, vollkommen frei sei; sie geben daher auch, wie wir gesehen, keine Doppelbrechung. Offenbar sind aber die Äthertheilchen nicht als vollkommen frei zu betrachten, ihre Beweglichkeit wird gewiss durch die Körpertheilchen modificirt. Dies angenommen, so muss wohl auch ohne Weiteres zugegeben werden, dass die Körpertheilchen im Allgemeinen nach drei zu einander senkrechten Axen einen verschiedenen Einfluss ausüben werden.

Mit Berücksichtigung dieses Umstandes werden aber die Bewegungsgleichungen viel complicirter werden: ihre wahre Gestalt aufzusuchen, dürfte vorderhand wohl noch aussichtslos

sein. Wir werden aber dem angegebenen Umstande gewiss einigermassen Rechnung tragen, wenn wir die unbekannte Function f in jeder der Gleichungen 9) mit geänderten Zahlwerthen ihrer Coëfficienten einführen. Wir schreiben also die Bewegungsgleichungen so

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \Sigma f\,(\Delta r+\Delta\rho)\,\frac{\Delta x+\Delta\xi}{\Delta r+\Delta\rho}\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \Sigma f'\,(\Delta r+\Delta\rho)\,\frac{\Delta y+\Delta\eta}{\Delta r+\Delta\rho}\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \Sigma f''(\Delta r+\Delta\rho)\,\frac{\Delta z+\Delta\zeta}{\Delta r+\Delta\rho}
\end{aligned}\right\} \qquad 10)$$

wo die Functionen f, f', f'' nur durch verschiedene Werthe ihrer Constanten sich unterscheiden.

Indem wir diesen Umstand bei der weiteren Entwicklung dieser Gleichungen im Auge behalten, setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f}{\Delta r}+\varphi\frac{\Delta x^2}{\Delta r^3}\right)\Delta x^2 = L_1, \quad \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f'}{\Delta r}+\varphi'\frac{\Delta y^2}{\Delta r^3}\right)\Delta x^2 = M_1\\
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f}{\Delta r}+\varphi\frac{\Delta x^2}{\Delta r^3}\right)\Delta y^2 = L_2, \quad \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f'}{\Delta r}+\varphi'\frac{\Delta y^2}{\Delta r^3}\right)\Delta y^2 = M_2\\
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f}{\Delta r}+\varphi\frac{\Delta x^2}{\Delta r^3}\right)\Delta z^2 = L_3, \quad \frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f'}{\Delta r}+\varphi'\frac{\Delta y^2}{\Delta r^3}\right)\Delta z^2 = M^3\\
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f''}{\Delta r}+\varphi''\frac{\Delta z^2}{\Delta r^3}\right)\Delta x^2 = N_1\\
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f''}{\Delta r}+\varphi''\frac{\Delta z^2}{\Delta r^3}\right)\Delta y^2 = N_2\\
&\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\left(\frac{f''}{\Delta r}+\varphi''\frac{\Delta z^2}{\Delta r^3}\right)\Delta z^2 = N_3\\
&\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi'\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{\Delta r^3} = P_1, \quad \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi''\frac{\Delta y^2\Delta z^2}{\Delta r^3} = P_2\\
&\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi''\frac{\Delta z^2\Delta x^2}{\Delta r^3} = Q_1, \quad \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi\frac{\Delta z^2\Delta x^2}{\Delta r^3} = Q_2\\
&\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi''\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta r^3} = R_1, \quad \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\Sigma m\varphi'\frac{\Delta x^2\Delta y^2}{\Delta r^3} = R_2
\end{aligned}\right\} \qquad 1$$

Hiebei bedeutet:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\Delta r) &= \Delta r\,\frac{df(\Delta r)}{d(\Delta r)} - f(\Delta r)\\ \varphi'(\Delta r) &= \Delta r\,\frac{df'(\Delta r)}{d(\Delta r)} - f'(\Delta r)\\ \varphi''(\Delta r) &= \Delta r\,\frac{df''(\Delta r)}{d(\Delta r)} - f''(\Delta r).\end{aligned}\right\} \quad 12)$$

Die Gleichungen 10) werden demzufolge:

$$\left.\begin{aligned}q^2h &= (L_1u^2+L_2v^2+L_3w^2)h+R_1uvk+Q_2uwl\\ q^2k &= R_2uvh+(M_1u^2+M_2v^2+M_3w^2)k+P_1vwl\\ q^2l &= Q_1uwh+P_2vwk+(N_1u^2+N_2v^2+N_3w^2)l.\end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Um die Bedingungen zu finden, welchen die Constanten genügen müssen, damit die letzten Gleichungen die Erscheinungen der Doppelbrechung repräsentiren, betrachten wir wieder zuerst die Lichtbewegung in den einzelnen Hauptschnitten. Durch die Annahme $u = 0$ werden die Gleichungen 13)

$$\left.\begin{aligned}q^2h &= (L_2v^2+L_3w^2)h\\ q^2k &= (M_2v^2+M_3w^2)k+P_1vwl\\ q^2l &= (N_2v^2+N_3w^2)l+P_2vwk.\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Zerlegen wir den Ausschlag wieder, wie in den Gleichungen 3) bis 5) angegeben, so gibt die Substitution der letzteren Werthe

$$\left.\begin{aligned}q_1^2 &= L_2v^2+L_3w^2\\ q_2^2 &= (M_2-P_1)v^2+M_3w^2\\ &= N_2v^2+(N_3-P_2)w^2\\ q_3 &= M_2v^2+(M_3+P_1)w^2\\ &= (N_2+P_2)v^2+N_3w^2.\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Der zweiten Gleichung 15) zufolge muss also sein:

$$\left.\begin{aligned}M_3 &= N_3-P_2\\ N_2 &= M_2-P_2\end{aligned}\right\} \quad 16)$$

die dritte gibt dann noch

$$P_1 = P_2 \quad 17)$$

und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_1^2 &= L_2 v^2 + L_3 w^2 \\ \mathfrak{q}_2^2 &= N_2 v^2 + M_3 w^2 \\ \mathfrak{q}_3^2 &= M_2 v^2 + N_3 w^2. \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

Wir sehen also, dass die drei Componenten jede eine verschiedene Geschwindigkeit haben und daher gänzlich von einander unabhängig sind. Die longitudinale Componente ($\mathfrak{q}_3$) gibt keinen Lichteffect für sich, sie kann aber wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeit auch nicht die anderen Componenten beeinflussen. Wir erhalten also in diesem Falle entsprechend der Beobachtung wirklich zwei transversale Wellen von verschiedener Geschwindigkeit, wovon die eine im Hauptschnitt, die andere senkrecht dazu schwingt. Von diesen zwei Wellen hat erfahrungsgemäss die eine constante Geschwindigkeit, man weiss jedoch nicht wie diese schwingt, sondern nur, dass sie parallel dem Hauptschnitte polarisirt ist. Nehmen wir nun an, dass die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene geschehen, so müssen wir $\mathfrak{q}_1$ constant setzen. Dies führt aber auf die Bedingung

$$L_2 = L_3 \qquad 18)$$

Indem wir nun die gleiche Rechnung auch für die anderen Hauptschnitte ausführen, erhalten wir folgendes System von Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} L_2 = L_3 = M_2 - R_2 = N_3 - Q_1 &= \mathfrak{a}^2 \\ M_3 = M_1 = N_3 - P_2 = L_1 - R_1 &= \mathfrak{b}^2 \\ N_1 = N_2 = L_1 - Q_2 = M_2 - P_1 &= \mathfrak{c}^2 \\ P_1 &= P_2 \\ Q_1 &= Q_2 \\ R_1 &= R_2. \end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

Diesen Gleichungen zufolge ist auch

$$\left.\begin{aligned} M_2 - \mathfrak{c}^2 &= N_3 - \mathfrak{b}^2 \\ N_3 - \mathfrak{a}^2 &= L_1 - \mathfrak{a}^2 \\ L_1 - \mathfrak{b}^2 &= M_2 - \mathfrak{a}^2. \end{aligned}\right\} \qquad 20)$$

Setzen wir daher

$$L_1+M_2+N_2 = 3S-2(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2) \qquad 21)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= S-\mathfrak{a}^2 \\ M_2 &= S-\mathfrak{b}^2 \\ N_3 &= S-\mathfrak{c}^2 \end{aligned}\right\} \qquad 22)$$

und die Gleichungen 13) geben

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}^2 h &= (S-\mathfrak{a}^2)(uh+vk+wl)u+\mathfrak{a}^2(v^2+w^2)h-\mathfrak{b}^2uvk-\mathfrak{c}^2uwl \\ \mathfrak{q}^2 k &= (S-\mathfrak{b}^2)(uh+vk+wl)v-\mathfrak{a}^2vuh+\mathfrak{b}^2(w^2+u^2)k-\mathfrak{c}^2vwl \\ \mathfrak{q}^2 l &= (S-\mathfrak{c}^2)(uh+vk+wl)w-\mathfrak{a}^2wuh-\mathfrak{b}^2wvk+\mathfrak{c}^2(u^2+v^2)l \end{aligned}\right\} \qquad 23)$$

Die letzten Gleichungen gehen für die transversalen Componenten des Ausschlages in die Fresnel'schen Formeln

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{a}^2-\mathfrak{q}^2)h &= (\mathfrak{a}^2hu+\mathfrak{b}^2kv+\mathfrak{c}^2lw)u \\ (\mathfrak{b}^2-\mathfrak{q}^2)k &= (\mathfrak{a}^2hu+\mathfrak{b}^2kv+\mathfrak{c}^2lw)v \\ (\mathfrak{c}^2-\mathfrak{q}^2)l &= (\mathfrak{a}^2hu+\mathfrak{b}^2kv+\mathfrak{c}^2lw)w \end{aligned}\right\} \qquad 24)$$

über, denen zufolge wir zwei zu einander senkrechte transversale Componenten mit ungleicher Geschwindigkeit erhalten. Für die longitudinale Componente gibt jede der Gleichungen 23)

$$\mathfrak{q}^2 = S-(\mathfrak{a}^2u^2+\mathfrak{b}^2v^2+\mathfrak{c}^2w^2) \qquad 25)$$

ihre Geschwindigkeit ist also jedenfalls verschieden von der der transversalen Wellen, welche daher auch nicht durch die longitudinale Welle beeinflusst werden können.
